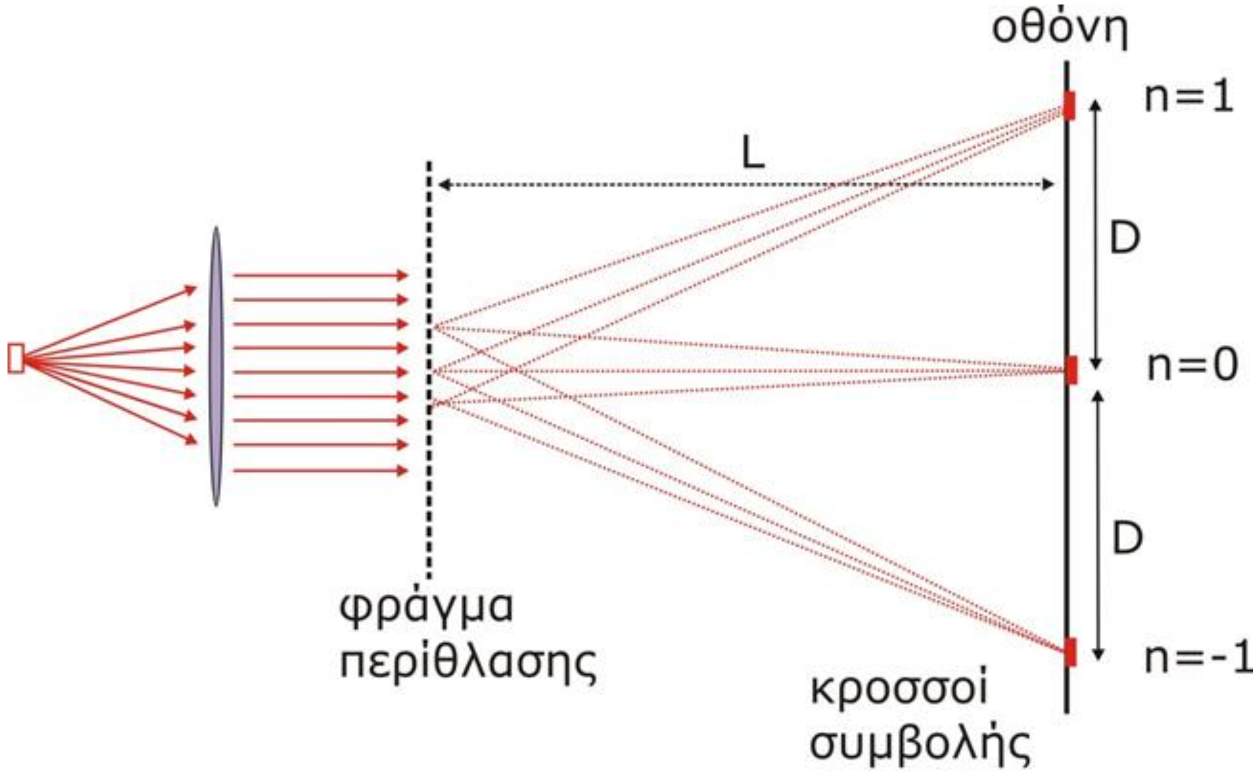
Πειραματικός υπολογισμός του μήκους κύματος μονοχρωματικής ακτινοβολίας

Τάξη : Γ΄ Λυκείου

Βασικές έννοιες και σχέσεις
Μήκος κύματος - Μονοχρωματική ακτινοβολία - Συμβολή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων - Κροσσοί συμβολής - Περίθλαση του φωτός - Αρχή του Huygens - Σύμφωνες πηγές - Φράγμα περίθλασης - Οπτικός δίσκος (CDή DVD)



Σχήμα 1

Φράγμα περίθλασης ονομάζουμε μια επιφάνεια με παράλληλες, ισαπέχουσες, λεπτές σχισμές. Έστω ότι μια μονοχρωματική ακτινοβολία μήκους κύματος λ προσπίπτει πάνωσε ένα φράγμα περίθλασης, του οποίου οι σχισμές έχουν πλάτος συγκρίσιμο με το λ. Σύμφωνα με την **αρχή του Huygens**, οι σχισμές του φράγματος μπορούν να θεωρηθούν ως σημειακές πηγές ακτινοβολίας. Έτσι, η ακτινοβολία που διέρχεται από την άλλη πλευρά του φράγματος προκύπτει από τη **συμβολή** των ακτινοβολιών που εκπέμπουν όλες οι σχισμές του.
Σε απόσταση L από το φράγμα τοποθετούμε μια οθόνη. Πάνω στην οθόνη παρατηρούμε διαδοχικές σκοτεινές και φωτεινές περιοχές που ονομάζονται **κροσσοί συμβολής**. Οι κροσσοί συμβολής είναι το αποτέλεσμα της συμβολής των ακτινοβολιών που εκπέμπονται από τις σχισμές του φράγματος (εικόνα 1).

Η επιφάνεια ενός οπτικού δίσκου (CD) είναι χαραγμένη από ομόκεντρους κύκλους-σχισμές(tracks).Η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς κύκλους είναι σταθερή. Σύμφωνα με τα κατασκευαστικά δεδομένα, ένα CD έχει 625 γραμμές/mm. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σχισμών είναι:

$$d = \frac{1}{625}\text{mm} = 0.0016\text{mm}=1.6\cdot10^{-6}\text{m}=1600\text{nm}$$

Βλέπουμε ότι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σχισμών του CD είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το μήκος κύματος των ακτινοβολιών του **ερυθρού** φάσματος(~650nm). Το CDμπορεί να λειτουργήσει ως ένα καλό φράγμα περίθλασης στην ερυθρή περιοχή του ορατού φάσματος.

Κάθε μονοχρωματική ακτινοβολία περιγράφεται ως ένα αρμονικό ηλεκτρικό ($E(\vec{x},t)$) και μαγνητικό κύμα ($B(\vec{x},t)$) που διαδίδεται στο χώρο. Το ηλεκτρικό πεδίο E στο σημείο P της οθόνης, ισούται με το άθροισμα των πεδίων στο P, που προέρχονται από όλες τις σχισμές (εικόνα 2). Για να υπολογίσουμε αυτό το άθροισμα, πρέπει να αριθμήσουμε τις σχισμές με ένα δείκτη *k: k*=-N,…,-2, -1, 0, 1, 2,…, N (η κεντρική σχισμή αντιστοιχεί στο 0). Δεδομένου ότι όλες οι σχισμές είναι **σύμφωνες πηγές** (έχουν το ίδιο πάτος E_0, την ίδια συχνότητα ω και την ίδια φάση), το πεδίο στο P που προέρχεται από την k-σχισμή έχει τη μορφή:

$$E_P^{(k)} = E_0 \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{x_k}{\lambda}\right)$$

Όπου x_k είναι η απόσταση του P από την *k*σχισμή και λ το μήκος κύματος της ακτινοβολίας.

Ώστε:

$$E_P = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} E_P^{(k)} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} E_0 \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{x_k}{\lambda}\right)$$

Οι αποστάσεις *kd* είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με την απόσταση *L* της οθόνης από το φράγμα (*kd*<<*L*,εικόνα 2). Έτσι, έχουμε:

$$x_k = x_0 - kd\sin\theta$$

και

$$E_P = E_0 \sum_{k=-N}^{N} \sin\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x_0 - 2\pi k \cdot \frac{d\cdot\sin\theta}{\lambda}\right]$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι στο P θα παρατηρήσουμε ενισχυτικό κροσσό συμβολής, εφόσον κάθε όρος $2\pi k \cdot \frac{d\cdot\sin\theta}{\lambda}$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Αυτό συμβαίνει όταν ισχύει η σχέση:

$$d\cdot\sin\theta = \lambda\cdot n \quad n = 0,\pm1,\pm2,... \tag{1α}$$

Έτσι, για n=0 έχουμε τον κεντρικό ενισχυτικό κροσσό συμβολής (σημείο O), για $n = \pm1$ τις δύο πρώτους ενισχυτικούς κροσσούς κλπ.

Σύμφωνα με τη σχέση 1 και την εικόνα 2, η θέση του πρώτου κροσσού συμβολής στο σημείο P, ικανοποιεί τις εξισώσεις:

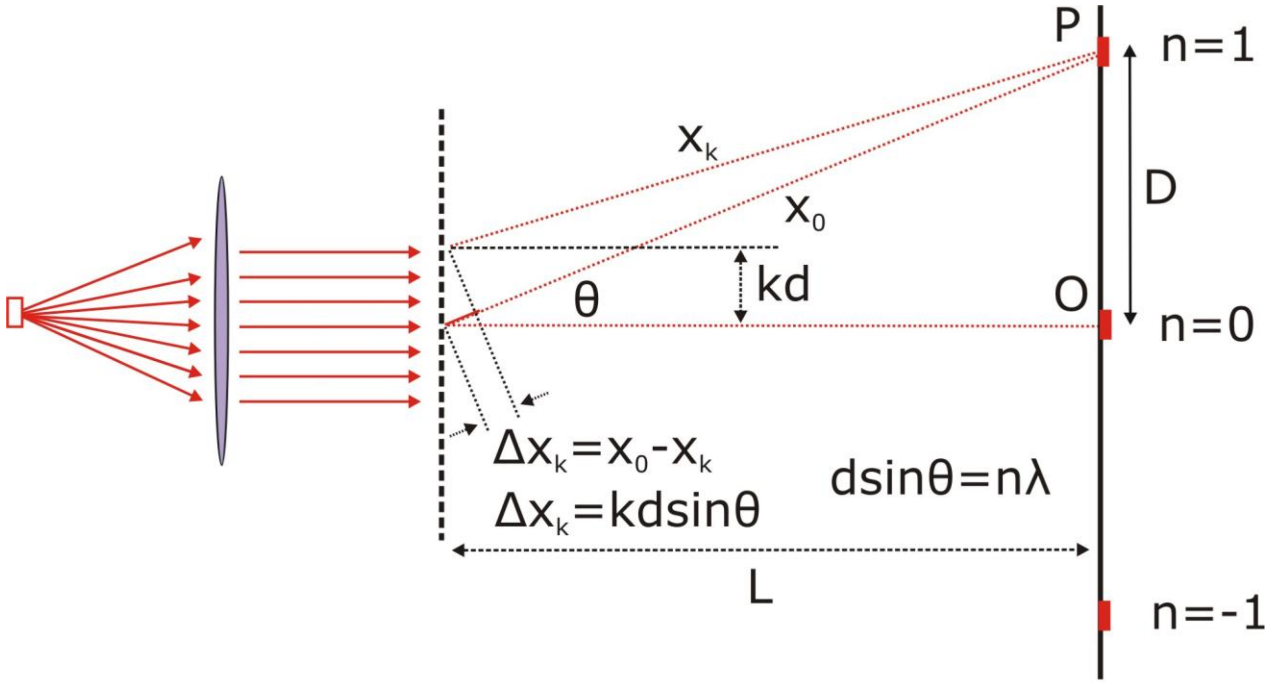
$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d} \tag{2}$$

και

$$\tan\theta = \frac{D}{L} \tag{3}$$

Από τη 2 συμπεραίνουμε ότι όταν μεταβάλλουμε την απόσταση *L* του φράγματος από την οθόνη, η γωνία *θ* διατηρείται σταθερή(εφόσον το sin*θ* εξαρτάται μόνον από τις σταθερές ποσότητες *λ* και *d*).
Από τη σχέση 3 συμπεραίνουμε ότι η απόσταση *D* του πρώτου ενισχυτικού κροσσού (σημείο P) από τον κεντρικό κροσσό (O) είναι ανάλογη της απόστασης *L*, αφού όπως είδαμε το *θ*, άρα και η tan*θ* διατηρείται σταθερή:

$$D = \tan\theta \cdot L \tag{4}$$



Σχήμα 2

Στην πειραματική διάταξη χρησιμοποιούμε ερυθρή ακτινοβολία που εκπέμπεται από φακό laser και ως φράγμα CD με απόσταση σχισμών *d*=1600nm (εικόνες 3α και β).
Η ερυθρή ακτινοβολία του laserέχει μήκος κύματος περίπου 650nm. Σύμφωνα με την εξίσωση 1, η προβλεπόμενη τιμή της γωνίας *θ* που αντιστοιχεί στη θέση του σημείου P (εικόνα 2), είναι:

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{650}{1600}\right) = 24\text{μοίρες}$$

Στην πειραματική διαδικασία υπολογίζουμε πειραματικά τη γωνία *θ* και συγκρίνουμε την πειραματική με τη θεωρητική τιμή.

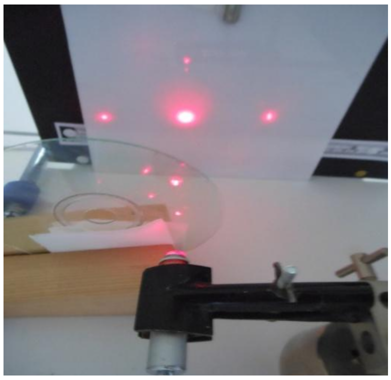
Εργαστηριακές δραστηριότητες

Στόχοι

1. Να περιγράφεις την πειραματική διάταξη που χρησιμοποιούμε στην άσκηση για τη μέτρηση του μήκους κύματος μονοχρωματικής ακτινοβολίας και να αναλύεις τον τρόπο λειτουργίας της
2. Να συνδυάζεις το θεωρητικό μοντέλο με τα πειραματικά δεδομένα και να υπολογίζεις το μήκος κύματος της μονοχρωματικής ακτινοβολίας

Όργανα και υλικά

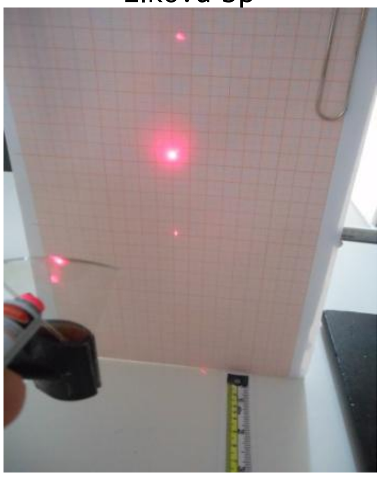
- Πηγή φωτεινής δέσμης, σύμφωνου μονοχρωματικού (ερυθρού) φωτός – φακός Laser(pointer)
- Οπτικός δίσκος – CD
- Αδιαφανής οθόνη (πέτασμα από χαρτόνι ή φελιζόλ)
- Τρίγωνο
- Χαρτί μιλιμετρέ
- Μετροταινία



Συνθέτουμε την πειραματική διάταξη που εικονίζεται στο σχήμα 2.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η πρόσπτωση της δέσμης laser απ' ευθείας στα μάτια σας μπορεί να προκαλέσει ανεπανόρθωτη βλάβη στην όρασή σας.

Εικόνα 3β



Για πέντε διαφορετικές τιμές του L μετράμε τις αντίστοιχες τιμές του D και τις καταχωρούμε στον πίνακα Α.

Σε χαρτί μιλιμετρέ (ή σε φύλλο excel),σχεδιάζουμε την πειραματική ευθεία $D = \mathrm{f}(L)$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Υπολογίζουμε την κλίση της ευθείας $D = \mathrm{f}(L)$ και από αυτήν, τη γωνία θ (σχέση 4) και το μήκος κύματος λ της ακτινοβολίας (σχέση 2).

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ Α	
Απόσταση φράγματος - οθόνης πετάσματος ***L*** **(cm)**	**Απόσταση του πρώτου κροσσού συμβολής από το Ο** ***D*****(cm)**
8	
10	
13	
15	
20	

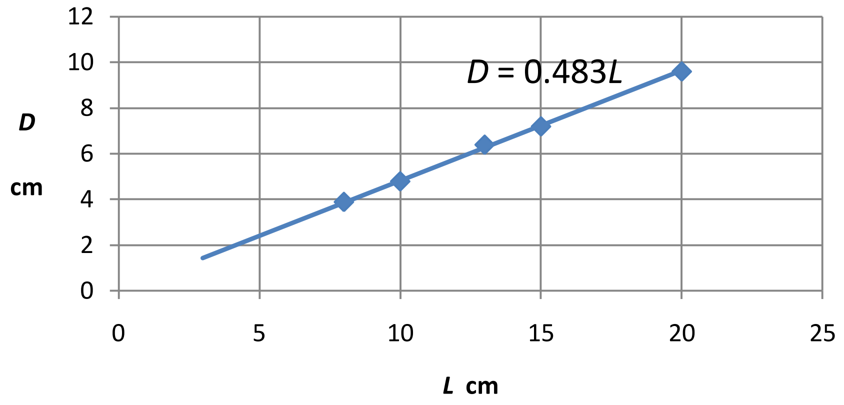
Υπολόγισε την απόκλιση αεπί τοις εκατό, της τιμής του μήκους κύματος που προέκυψε από την πειραματική διαδικασία ως προς την τιμή αναφοράς για το ερυθρό, λ_0=670nm:

$$\Delta\lambda = \frac{|\lambda_{\pi\epsilon\iota\rho} - \lambda_o|}{\lambda_o}$$

Οι μετρήσεις θεωρούνται ικανοποιητικές εφόσον α<10%.

Ενδεικτικές μετρήσεις

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ Α	
Απόσταση φράγματος - οθόνης πετάσματος *L* (cm)	**Απόσταση του πρώτου κροσσού συμβολής από το Ο *D*(cm)**
8	3,9
10	4,8
13	6,4
15	7,2
20	9,6



θ=25.8μοίρες - λ=696nm - a=4%

- ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Στα ίδια αποτελέσματα μπορούμε να καταλήξουμε, ακολουθώντας την εξής συλλογιστική:

Σύμφωνα με το σχήμα (2) :

$$\boxed{\eta\mu\theta = \frac{D}{x_0} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{D}{\sqrt{L^2 + D^2}}} \quad (5)$$

Η σχέση $d \cdot \sin\theta = \lambda \cdot n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ λόγω της (5), γίνεται :

$$\boxed{d \cdot \frac{D}{\sqrt{L^2 + D^2}} = \lambda} \quad (6)$$

για κ=1 , δηλ. ο κροσσός συμβολής 1ης τάξης .

$$d^2 D^2 = \lambda^2 (D^2 + L^2) \Leftrightarrow D^2 = \frac{\lambda^2}{(d^2 - \lambda^2)} \cdot L^2$$

$$\boxed{\Leftrightarrow D = \pm \frac{\lambda}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}} \cdot L}$$

Επειδή η απόσταση D μηδενικού κροσσού συμβολής και κροσσού συμβολής 1ης τάξης παίρνει μόνο θετικές τιμές : D >0 , ∀ L

η σχέση (4) γίνεται τελικά:

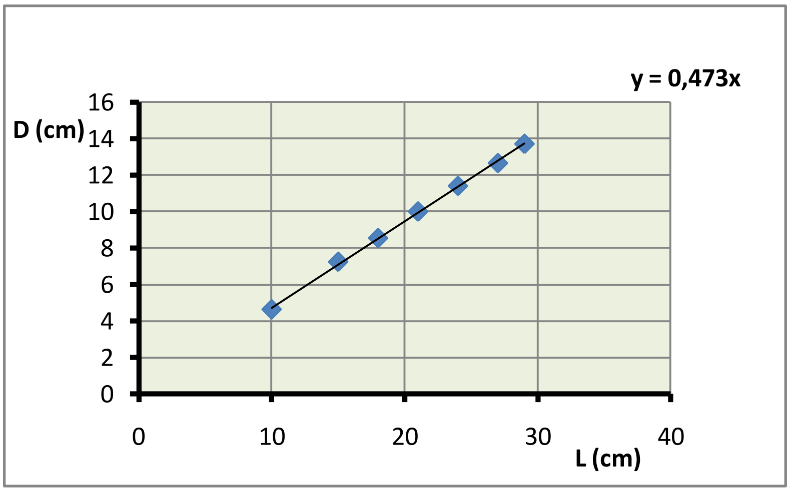
$$\boxed{D = \frac{\lambda}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}} \cdot L} \qquad (7)$$

- Από την γραφική απεικόνιση της σχέσης (7) σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, θα υπολογίσουμε την ***κλίση b της ευθείας D=f(L)*** , και μέσω αυτής , ***το μήκος κύματος (λ)*** της μονοχρωματικής ακτινοβολίας:

$$\boxed{\lambda = \frac{b \cdot d}{\sqrt{b^2 + 1}}}$$

Ενδεικτικές μετρήσεις :

L (cm)	D (cm)
10	4,65
15	7,25
18	8,55
21	10
24	11,4
27	12,65
29	13,7



$$\lambda = \frac{0,47 \times 1,57}{\sqrt{(0,47)^2 + 1}} = \frac{0,74}{\sqrt{1,2209}} = \frac{0,7374}{1,105} = 0,667\,\mu m = 667 nm$$