

Στάσιμα κύματα σε χορδή

Στοιχεία θεωρίας

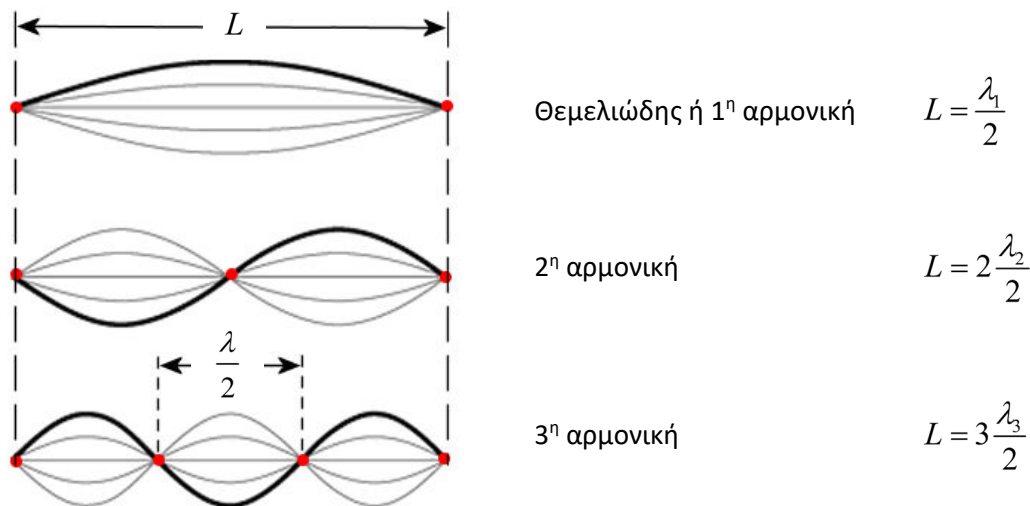
Μια τεντωμένη χορδή έχει τα δύο άκρα της στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία. Αν απομακρύνουμε τη χορδή από τη θέση ισορροπίας της και την αφήσουμε στη συνέχεια ελεύθερη, μια ιδιόμορφη ταλαντωτική κατάσταση δημιουργείται στη χορδή που ονομάζεται **στάσιμο κύμα**. Χαρακτηριστικό του στάσιμου κύματος είναι πως υπάρχουν κατά μήκος της χορδής σημεία που διατηρούνται εντελώς ακίνητα (και ονομάζονται **δεσμοί**), και σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος (και ονομάζονται **κοιλίες**), ενώ όλα τα υπόλοιπα σημεία ταλαντώνονται με ενδιάμεσο πλάτος και την ίδια συχνότητα.

Η ενέργεια, που δίνουμε στη χορδή με την αρχική διέγερση, μέσω κυμάτων μεταφέρεται με σταθερή -σε δεδομένες συνθήκες- ταχύτητα κατά μήκος της τεντωμένης χορδής. Η ταχύτητα διάδοσης v και η συχνότητα f των κυμάτων σχετίζονται μεταξύ τους με τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής:

$$v = \lambda \cdot f \quad (1)$$

όπου λ είναι η απόσταση που διανύει το κύμα σε χρόνο ίσο με την περίοδό του και ονομάζεται **μήκος κύματος**.

Η ανάκλαση των κυμάτων στα ακλόνητα άκρα της χορδής οδηγεί σε φαινόμενα συμβολής, με αποτέλεσμα την ανακατανομή της ενέργειας στη χορδή και τη δημιουργία στάσιμων κυμάτων, στα οποία **η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών (ή δύο διαδοχικών κοιλιών) ισούται με το μισό του μήκους κύματος λ** . Άρα **δε μπορούν** όλα τα κύματα να δημιουργήσουν στάσιμα κύματα στη χορδή, αλλά **μόνο** όσα έχουν το κατάλληλο μήκος κύματος, ώστε να εμφανίζονται δεσμοί στα ακλόνητα άκρα της χορδής. Μερικές περιπτώσεις δημιουργίας στάσιμων κυμάτων σε τεντωμένη χορδή σταθερού μήκους L φαίνονται στο σχήμα της Εικόνας 1:



Εικόνα 1: Στάσιμα κύματα σε τεντωμένη χορδή

Είναι φανερό από τα παραπάνω πως η συνθήκη δημιουργίας στάσιμων κυμάτων σε μια χορδή μήκους L , που έχει ακλόνητα στερεωμένα και τα δυο της άκρα, παίρνει τη μορφή:

$$L = n \left(\frac{\lambda}{2} \right) \quad (2)$$

με n ακέραιο αριθμό. Συνδυάζοντας τη σχέση (1) με τη (2) παίρνουμε:

$$L = n \left(\frac{v}{2f} \right) \quad (3)$$

Περιορίζοντας τη μελέτη μας μόνο για την 1^η αρμονική ή θεμελιώδη συχνότητα ($n = 1$), από την εξίσωση (3) παίρνουμε:

$$L = \left(\frac{v}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{f} \right) \quad (4)$$

ή χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη περίοδο αντί για τη συχνότητα ταλάντωσης των κινούμενων σημείων της χορδής:

$$L = \left(\frac{v}{2} \right) \cdot T \quad (5)$$

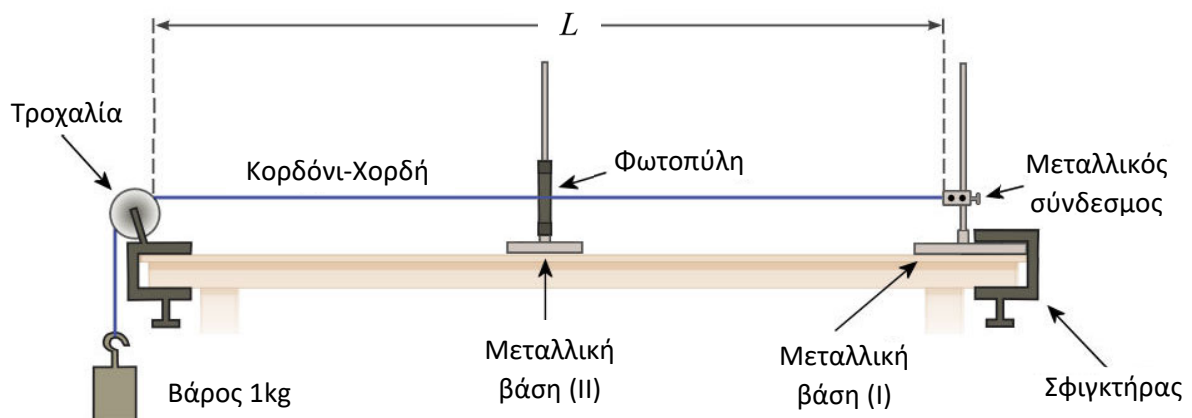
Στόχος της εργαστηριακής άσκησης είναι η πειραματική επιβεβαίωση της σχέσης (5) και ο υπολογισμός της ταχύτητας διάδοσης των κυμάτων στη χορδή που σας δίνεται.

Πειραματική διάταξη

Σας δίνονται:

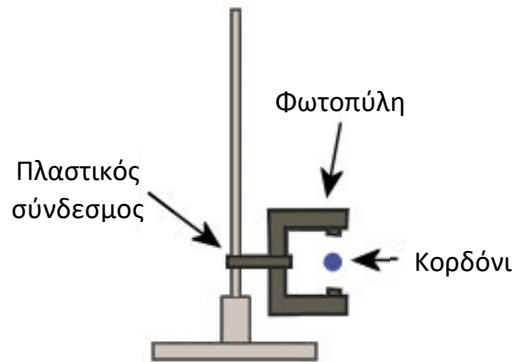
- Ηλεκτρονικό χρονόμετρο με φωτοπύλη.
- Μεταλλική βάση στήριξης με ορθοστάτη (I).
- Σφιγκτήρας τύπου G.
- Πλαστική τροχαλία.
- Κορδόνι στερεωμένο από τη μία του άκρη σε μεταλλικό σύνδεσμο.
- Μεταλλική βάση στήριξης με ορθοστάτη (II).
- Πλαστικός σύνδεσμος για τη στερέωση της φωτοπύλης στον ορθοστάτη.
- Βάρος του 1 kg.
- Μετροταινία.

Η πειραματική διάταξη συναρμολογείται όπως φαίνεται στο σχήμα της Εικόνας 2:



Εικόνα 2: Η πειραματική διάταξη

Η φωτοπύλη του ηλεκτρονικού χρονομέτρου τοποθετείται στη διάταξη κατά τέτοιο τρόπο, ώστε στη θέση ισορροπίας του το νήμα να βρίσκεται ακριβώς πάνω από το LED υπερύθρων της φωτοπύλης, όπως φαίνεται και στο σχήμα της Εικόνας 3 που αποτελεί πλάγια όψη της προηγούμενης εικόνας.



Εικόνα 3: Λεπτομέρεια φωτοπύλης

Κατ' αυτό τον τρόπο κατά τις οριζόντιες ταλαντώσεις του νήματος η δέσμη της φωτοπύλης διακόπτεται κάθε φορά που το νήμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του. Είναι σημαντικό επίσης να τονίσουμε, ότι κάθε φορά η φωτοπύλη πρέπει να τοποθετείται περίπου στο μέσο του οριζόντιου τμήματος του νήματος.

Πειραματική διαδικασία

1. Συναρμολογήστε την πειραματική διάταξη, τοποθετώντας τη μεταλλική βάση (I) με τον αντίστοιχο ορθοστάτη στη μία άκρη του πάγκου εργασίας, και την τροχαλία στο ακριβώς απέναντι σημείο της άλλης άκρης του πάγκου. Στερεώστε τη μεταλλική βάση (I) με τη βοήθεια του σφιγκτήρα τύπου "G". Στερεώστε στον ορθοστάτη το μεταλλικό σύνδεσμο με το νήμα, περάστε το νήμα από το αυλάκι της τροχαλίας, και στο άκρο του κατακόρυφου τμήματος του νήματος στερεώστε το βάρος του 1kg, ώστε το νήμα να διατηρείται τεντωμένο και κατά το δυνατό οριζόντιο. Τέλος τοποθετήστε τη μεταλλική βάση (II) με τη φωτοπύλη σύμφωνα με τις οδηγίες που δόθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.
2. Με τη μετροταινία μετρήστε το μήκος L του νήματος (χορδή), από το ένα ακίνητο άκρο του στο μεταλλικό σύνδεσμο μέχρι το ακίνητο σημείο του πάνω στην τροχαλία και σημειώστε το σχετικό κελί στον Πίνακα 1.
3. Κρατώντας τη χορδή από το μέσο της, εκτρέψτε τη λίγο (όχι περισσότερο από 2 cm) από τη θέση ισορροπίας της κατά την οριζόντια διεύθυνση, και αφού ενεργοποιήσετε και θέσετε το ηλεκτρονικό χρονόμετρο σε τρόπο λειτουργίας "F3", αφήστε τη χορδή ελεύθερη. Αφήστε το χρονόμετρο να καταγράψει όλες τις τιμές χρόνου που μπορεί να αποθηκεύσει στη μνήμη του. Στον τρόπο λειτουργίας "F3" το χρονόμετρο καταγράφει το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε τρεις διαδοχικές διελεύσεις της χορδής από τη θέση ισορροπίας της, δηλ. κάθε αποθηκευμένη τιμή στη μνήμη του αντιστοιχεί στην περίοδο των ταλαντώσεων που εκτελεί η χορδή. Αγνοώντας τις δύο πρώτες μετρήσεις, ανακαλέστε τις επόμενες πέντε (5) από τη μνήμη του ηλεκτρονικού χρονομέτρου, και σημειώστε τις στη σχετική στήλη του Πίνακα (1). Τέλος υπολογίστε τη μέση τιμή αυτών των μετρήσεων και σημειώστε το αποτέλεσμα στο σχετικό κελί του Πίνακα (1). Χρησιμοποιήστε για τη μέση τιμή της περιόδου ακρίβεια ίδια με αυτή των επιμέρους μετρήσεων.
4. Μειώστε το μήκος της χορδής περίπου κατά 10 cm, μετακινώντας τη μεταλλική βάση στήριξης (I), και στερεώστε τη βάση στη νέα της θέση με τη βοήθεια του σφιγκτήρα. Μετακινήστε τη φωτοπύλη, ώστε να τοποθετηθεί στο μέσο του μήκους του νήματος, και προσέξτε ώστε το βάρος του 1kg να μην ακουμπήσει στο πάτωμα.
5. Επαναλάβετε τα βήματα 2, 3 και 4 για συνολικά πέντε (5) διαφορετικά μήκη της χορδής.

Πίνακας 1: Πειραματικά δεδομένα

	1 ^η σειρά μετρήσεων	2 ^η σειρά μετρήσεων	3 ^η σειρά μετρήσεων	4 ^η σειρά μετρήσεων	5 ^η σειρά μετρήσεων
Μήκος χορδής L (m)					
Μετρήσεις περιόδου T (s)					
Μέση τιμή περιόδου T (s)					

Επεξεργασία δεδομένων

- Με τα πειραματικά σημεία (**T, L**), σχεδιάστε σε μιλιμετρέ χαρτί τη γραφική παράσταση $L = g(T)$ του μήκους της χορδής (L) σε συνάρτηση με τη μέση τιμή της περιόδου (T) των ταλαντώσεων της. Σχεδιάστε επίσης την ευθεία που προσεγγίζει καλύτερα το σύνολο των πειραματικών σημείων.
- Η γραμμή που χαράξατε αντιστοιχεί στην πειραματική επιβεβαίωση της εξίσωσης (5). Υπολογίστε την κλίση της πειραματικής ευθείας, και τελικά υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στη χορδή. Να γράψετε το τελικό αποτέλεσμα με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου.
- Επιβεβαιώστε την ακρίβεια των υπολογισμών σας με τη βοήθεια του EXCEL.
- Τους νόμους που διέπουν τις ταλαντώσεις μιας χορδής μελέτησε πειραματικά και διατύπωσε το 1636 ο Γάλλος κληρικός Marin Mersenne. Ο τρίτος σχετικός νόμος του διατυπώνεται ως εξής: «Για διαφορετικές χορδές του ίδιου μήκους και τάσης η περίοδος ταλάντωσης είναι ανάλογη της ποσότητας \sqrt{w} , όπου w είναι το βάρος της χορδής». Με βάση την πρόταση αυτή και τη θεωρία των στάσιμων κυμάτων όπως αναφέρθηκε στην αντίστοιχη θεωρία πιστεύετε πως η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην παχύτερη χορδή σε σχέση με την αντίστοιχη ταχύτητα σε μια λεπτότερη (αλλά ίδιου υλικού) χορδή είναι:

α. μικρότερη β. μεγαλύτερη γ. ίδια

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Το πρόβλημα του οργανοποιού

Ένας οργανοποιός κατασκευάζει μια κιθάρα με μήκος ανοιχτής χορδής (δηλαδή το μήκος της χορδής που ταλαντώνεται όταν δεν την πιέζουμε με το δάχτυλό μας σε κάποιο σημείο της) ίσο με $L_1 = 57 \text{ cm}$. Θέλετε να τον βοηθήσετε για τη σωστή τοποθέτηση των τάστων στην ταστιέρα της κιθάρας. Γνωρίζετε ότι:

1. Τα τάστα είναι τα μικρά συρμάτινα τμήματα που τοποθετούνται κατά μήκος του μπράτσου-ταστιέρας της κιθάρας και μας επιτρέπουν (πιέζοντας πάνω τους μια χορδή) να μεταβάλλουμε το μήκος της χορδής που ταλαντώνεται και συνεπώς και τη συχνότητα του ήχου που παράγεται από την τεντωμένη χορδή. Με τον τρόπο αυτό να μπορούμε να παίζουμε με την ίδια χορδή πολλές διαφορετικές μουσικές νότες.
2. Η θεμελιώδης συχνότητα της νότας που παράγεται από μια τεντωμένη χορδή είναι ίση με τη θεμελιώδη συχνότητα των στάσιμων κυμάτων που δημιουργούνται στη χορδή.
3. Οι θεμελιώδεις συχνότητες f_1 και f_2 από δύο διαδοχικές νότες (π.χ. Ντο και Ντο δίεση) στη συγκερασμένη μουσική κλίμακα έχουν λόγο σταθερό:

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt[12]{2} \approx 1,059$$

Με βάση τα παραπάνω να προσδιορίσετε τις θέσεις στις οποίες πρέπει ο οργανοποιός να τοποθετήσει τα μεταλλικά τάστα στην ταστιέρα της κιθάρας.