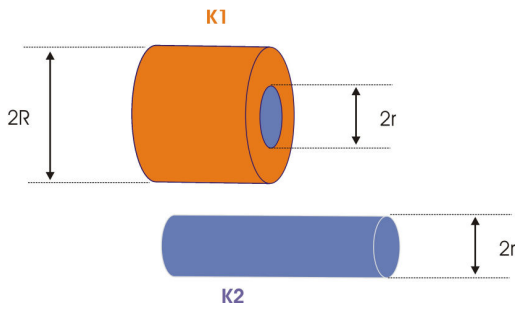
ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ, ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΦΩΤΟΠΥΛΗΣ

Στόχοι.

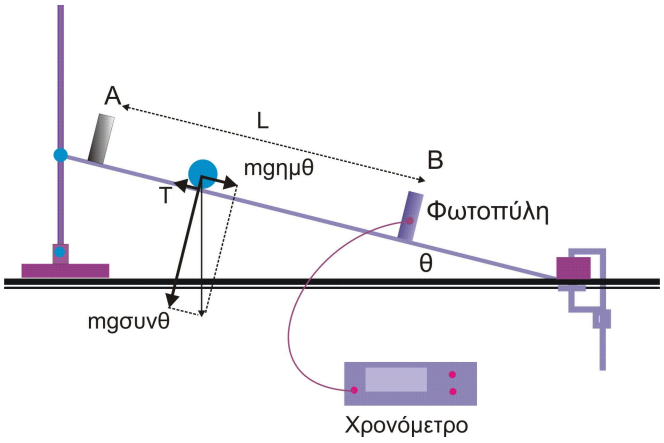
- ✓ Σχεδιασμός, συναρμολόγηση και λειτουργία απλών πειραματικών διατάξεων, στο πλαίσιο του θεωρητικού μοντέλου του άκαμπτου (στερεού) σώματος.
- ✓ Σχεδιασμός γραφήματος με βάση τα πειραματικά δεδομένα.
- ✓ Υπολογισμός της ροπής αδράνειας ομοιογενούς κυλινδρικού σώματος με δύο διαφορετικές διαδικασίες.
- ✓ Έλεγχος των θεωρητικών προβλέψεων και υπολογισμός μεγεθών από το πειραματικό γράφημα.

Απαιτούμενα όργανα και υλικά.

1. Επίπεδη, ομοιόμορφη σανίδα διαστάσεων 120cm x 40cm περίπου. [Για παράδειγμα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η επιφάνεια ενός θρανίου].
2. Υποστηρίγματα για τη δημιουργία κεκλιμένου επιπέδου,
3. Μεταλλικός κύλινδρος με οπή (**K1**) και μεταλλικός συμπαγής κύλινδρος (**K2**) με διάμετρο ίση με την διάμετρο της οπής του μεγάλου κυλίνδρου (περιλαμβάνονται στη «σειρά οργάνων μηχανικής ΦΕ16»).
4. Μετροταινία 2m και χάρακας κανόνας 30cm.
5. Ζυγός (max 1-2Kg).
6. Φωτοπύλη με χρονόμετρο (περιλαμβάνονται στη «σειρά οργάνων μηχανικής ΦΕ16»).
7. Διαστημόμετρο.
8. Σφικτήρες τύπου C.
9. Μαρκαδόρος.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Το θεωρητικό πλαίσιο

Ο κύλινδρος του σχήματος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος του πλάγιου επιπέδου. Τη χρονική στιγμή t=0 ο κύλινδρος έχει ταχύτητα ίση με μηδέν. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ της αρχικής και μιας τυχαίας θέσης της διαδρομής του κυλίνδρου (σχήμα 2):

$$mgh = \frac{1}{2}mu_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1)$$

Δεδομένου ότι ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει:

$$\omega = \frac{u_{cm}}{R}$$

Επιπλέον, από το σχήμα 2 προκύπτει ότι $h = L \cdot \eta\mu\theta$.

Οπότε, από τη σχέση 1, προκύπτει:

$$u_{cm}^2 = \left(\frac{2g \cdot \eta\mu\theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}\right) \cdot L \qquad (2)$$

όπου:

u_{cm}: η στιγμιαία ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου (τη συμβολίζουμε απλά με u)

m: η μάζα των δυο κυλίνδρων ($m = m_1 + m_2$)

R: η ακτίνα του μεγάλου κυλίνδρου,

I: η ροπή αδρανείας του συστήματος των δυο κυλίνδρων,

L: το μήκος της διαδρομής του κέντρου μάζας του κυλίνδρου στο πλάγιο επίπεδο και

h: η υψομετρική διαφορά της αρχικής από την τελική θέση του κέντρου μάζας.

g: η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Παρατηρούμε ότι η σχέση του u^2 *με το* L είναι γραμμική, με σταθερά αναλογίας την ποσότητα:

$$k = \frac{2g \cdot \eta\mu\theta}{1 + \frac{I}{mR^2}} \qquad (3)$$

Έτσι, για να υπολογίσουμε πειραματικά το I, αρκεί να βρούμε πειραματικά την τιμή της κλίσης k της ευθείας:

$$u^2 = k \cdot L$$

Τότε, σύμφωνα με τη σχέση 3, η ροπή αδράνειας I υπολογίζεται από τη σχέση:

$$I = mR^2\left(\frac{2g \cdot \eta\mu\theta}{k} - 1\right) \qquad (4)$$

Έλεγχος του πλαισίου θεωρίας – πειράματος

Η ροπή αδράνειας ομοιογενούς, κυλίνδρου μάζας m και ακτίνας R, δίνεται από τη σχέση:

$$I_c = \frac{1}{2}mR^2$$

Στην άσκηση, το κυλιόμενο σώμα K έχει τη μορφή που εικονίζεται στις εικόνες 1, 3, 4. Επομένως η ροπή αδρανείας του ισούται με το άθροισμα της ροπής αδράνειας του κυλίνδρου K1, με την οπή συν τη ροπή αδράνειας του μικρού, συμπαγούς κυλίνδρου K2. Έστω m_1, R, h_1 και m_2, r, h_2 οι μάζες, ακτίνες και ύψη των δύο κυλίνδρων και ρ η πυκνότητα του υλικού τους.

Υπολογισμός της ροπής αδράνειας (I_1) του κυλίνδρου K_1, με οπή ακτίνας r. Η μάζας του K_1 είναι m_1 και η εξωτερική ακτίνα του R:

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου με οπή ισούται με τη ροπή αδράνειας που θα είχε αν ήταν συμπαγής μείον το ροπή αδράνειας κυλίνδρου K_o που καλύπτει ακριβώς την οπή. Αν m_o είναι η μάζα του κυλίνδρου K_o, η ροπή αδρανείας του είναι $I_o = \frac{1}{2} \cdot m_o \cdot r^2$.

Υπολογίζουμε τη μάζα m_o του K_o συναρτήσει της m_1:

$$\frac{m_o}{m_1} = \frac{\rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_1}{\rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h_1 - \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_1} = \frac{r^2}{R^2 - r^2}$$

Από τη μέτρηση των ακτίνων R και r, προκύπτει ότι R=3r, οπότε από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι $m_o = \frac{1}{8} m_1$. Η ροπή αδράνειας I_o είναι:

$$I_o = \frac{1}{2} \cdot m_o \cdot r^2 = \frac{1}{16} \cdot m_1 \cdot r^2$$

Ώστε:

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_o) \cdot R^2 - \frac{1}{2} \cdot m_o \cdot r^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R^2 \left(1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{72}\right)$$

όπου m_1 η μάζα του κυλίνδρου με την οπή, που μετρήσαμε με το ζυγό.

Τελικά, η ροπή αδράνειας (I) του σώματος K είναι:

$$I = I_1 + I_2 =$$

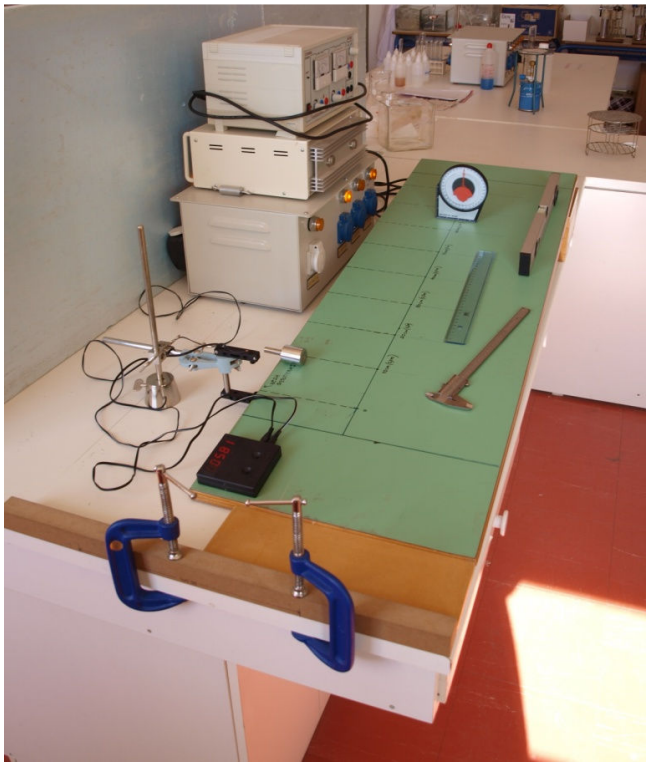
$$= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R^2 \left(1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{72}\right) + \left[\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot r^2\right]$$

Από τη μέτρηση των υψών των δύο κυλίνδρων, προκύπτει ότι $h_2=2h_1$, οπότε (αφού οι κύλινδροι είναι ομοιογενείς) ισχύει και $m_2=2m_o=1/4m_1$ και η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής:

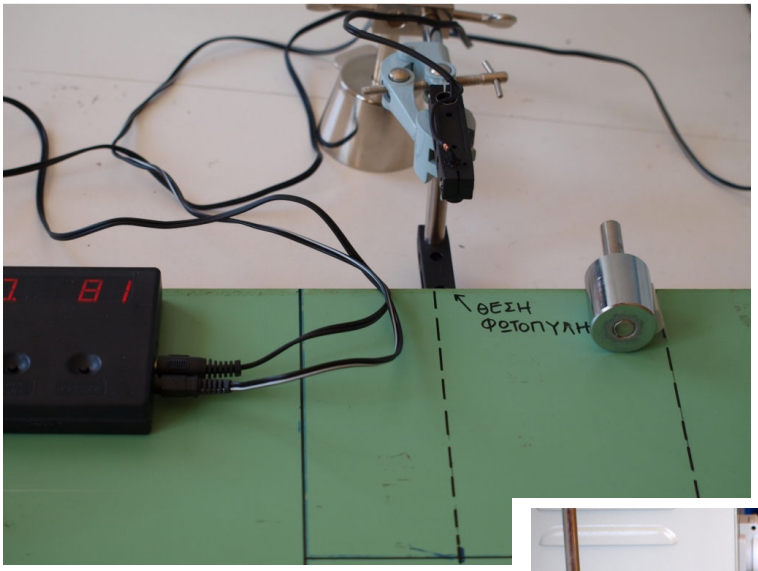
$$I = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R^2 \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{72}\right) \simeq$$

$$\simeq 1{,}13 \cdot \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R^2 \qquad (5)$$

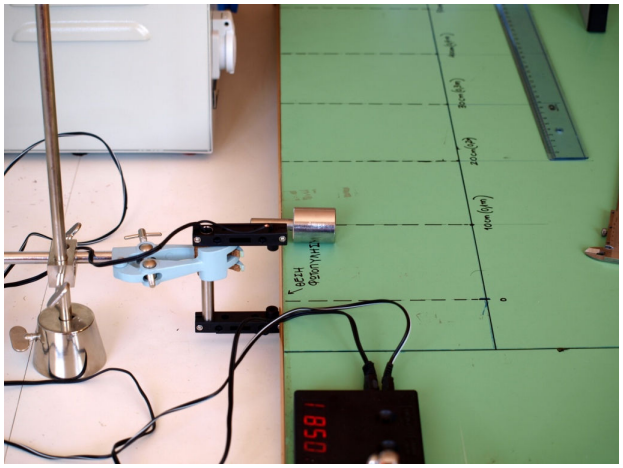
Η τιμή που θα προκύψει από τη σχέση 5, συγκρίνεται με την τιμή της ροπής αδράνειας του κυλιόμενου σώματος, που υπολογίζεται από την πειραματική διαδικασία. Με τον τρόπο αυτό ελέγχουμε αν συμφωνεί το πείραμα με τις θεωρητικές προβλέψεις.



Εικόνα 3



Εικόνα 4



Εικόνα 5

Πειραματική διαδικασία

1) Ζυγίζουμε τον κάθε κύλινδρο και καταγράφουμε τη μάζα του.
2) Στερεώνουμε (με κόλλα) τον κύλινδρο Κ2 στο εσωτερικό του (σχήμα 1). Η μάζα του σώματος Κ, που προκύπτει, είναι $\mathbf{m = m_1 + m_2}$
3) Τυλίγουμε την παράπλευρη επιφάνειά του Κ1 με αυτοκόλλητη χαρτοταινία, ώστε να αποφύγουμε κάθε ενδεχόμενο ολίσθησής του στο πλάγιο επίπεδο.
4) Μετράμε με το διαστημόμετρο: τη διάμετρο 2R του Κ1, και τη διάμετρο 2r του Κ2.
5) Συνθέτουμε την πειραματική διάταξη που φαίνεται στις εικόνες 3, 4, 5. Προσέχουμε ώστε η γωνία κλίσης του πλάγιου επιπέδου να μην υπερβαίνει τις 10 μοίρες
6) Αφήνουμε τον κύλινδρο (σώμα Κ) να ξεκινήσει από τη θέση L=0,1m και μετράμε το χρόνο διέλευσης του από την φωτοπύλη.
7) Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία τοποθετώντας τον κύλινδρο διαδοχικά, στις θέσεις L=0,2, 0,3… Καταγράφουμε όλες τις μετρήσεις μας στον πίνακα μετρήσεων.

Παρατηρήσεις:

α) Προσέχουμε ώστε ο κύλινδρος Κ να κινείται παράλληλα με τις οριζόντιες ακμές της πλάγιας σανίδας.

β) Επειδή στη μέτρηση του χρόνου μπορεί να γίνουν σφάλματα, προτείνεται να γίνουν τρείς χρονομετρήσεις, για κάθε τιμή του L. Αν κάποια μέτρηση διαφέρει πολύ από τις άλλες, την απορρίπτουμε και επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση. Ως Δt καταγράφουμε τη μέση τιμή των τριών μετρήσεων.

8) Συμπληρώνουμε όλες τις στήλες του πίνακα μετρήσεων.

Μετρήσεις

Μάζα κυλίνδρου Κ1: m_1 = ……Kg

Μάζα κυλίνδρου Κ2: m_2 = ……Kg

Μάζα σώματος Κ: m = m_1+m_2 =…… Kg

Γωνία κλίσης πλάγιου επιπέδου: θ =……μοίρες

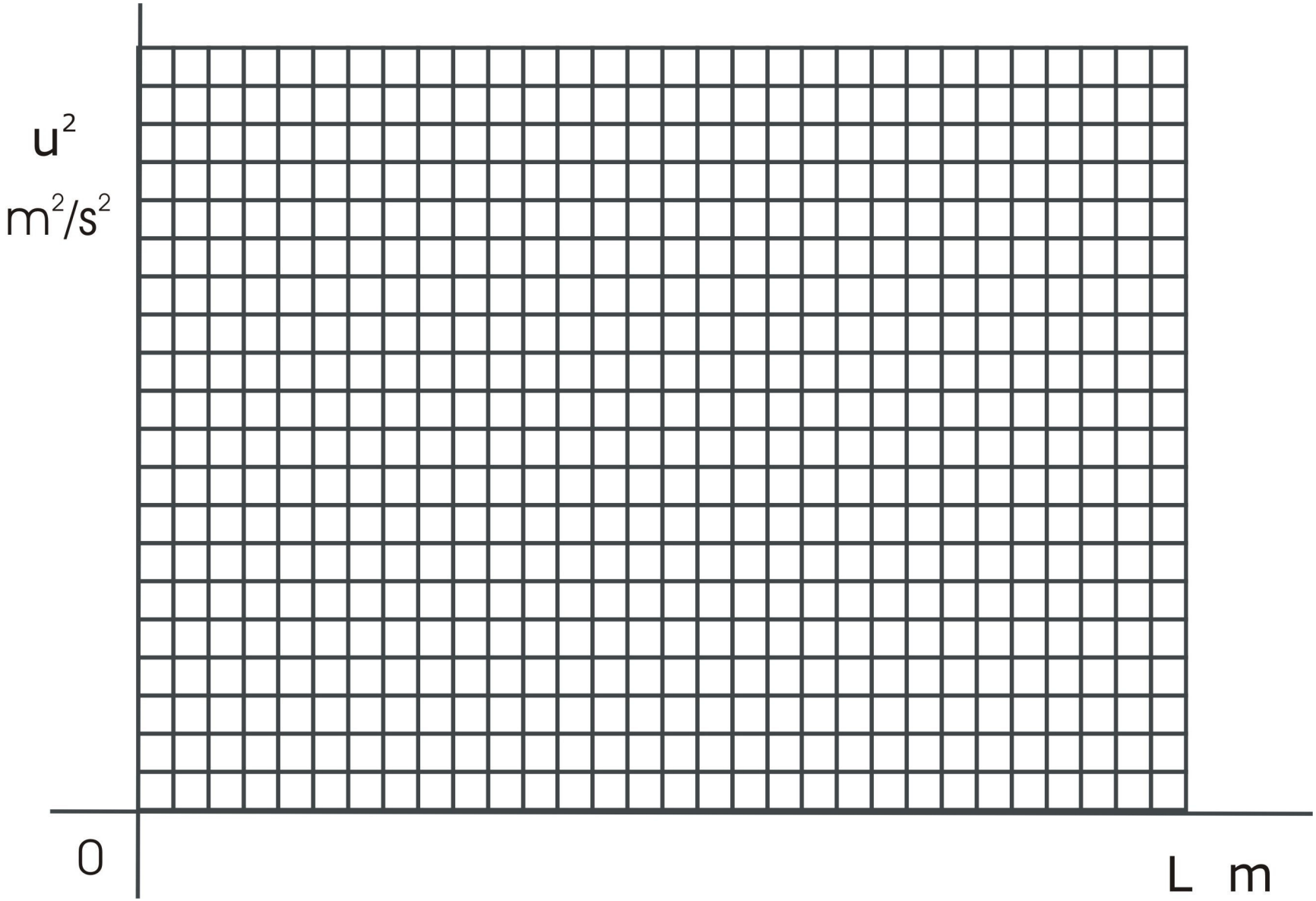
ημθ = ……

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ					
ΘΕΣΗ L (m)	ΧΡΟΝΟΣ Δt	Μ.Ο. Δt	Δx=2r (m)	u_{cm} =Δx/Δt	u_{cm}^2
0	-	-		0	0
0.1					
0.2					
0.3					
0.4					
0.5					
0.6					

Σχεδιάζουμε την *ευθεία* u^2 = f (L), στο τετραγωνισμένο φύλλο, επιλέγοντας κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Μετράμε την κλίση της ευθείας αυτής και υπολογίζουμε την ποσότητα k (σχέση 3).

Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας I, του κυλίνδρου από σχέση 4.

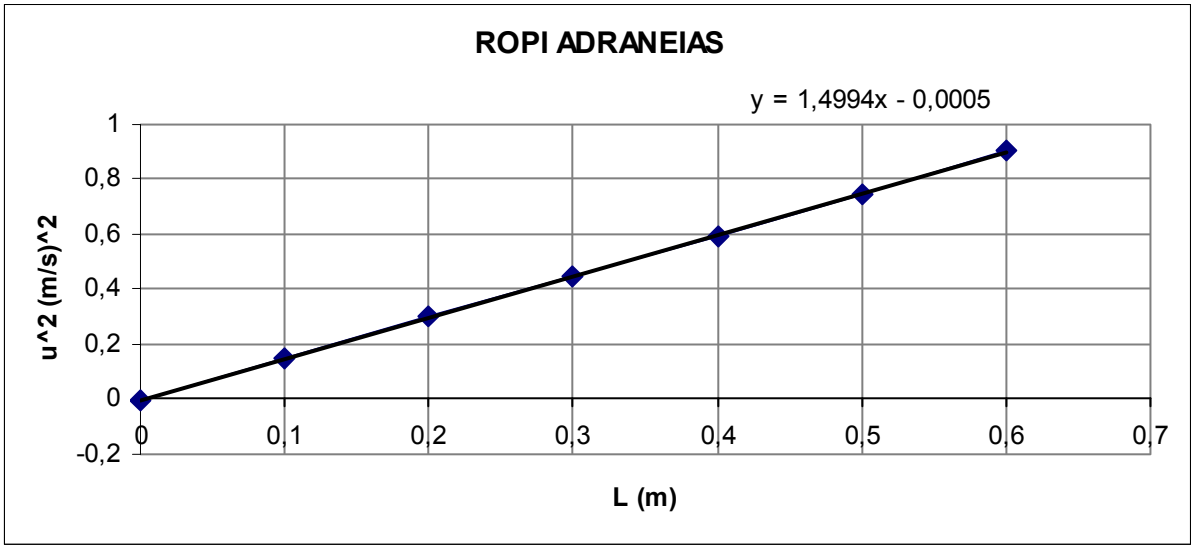
Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας του κυλίνδρου με βάση τη σχέση 5 και τη συγκρίνουμε με την τιμή που προέκυψε στο το βήμα 9. Υπολογίζουμε τη σχετική διαφορά ($\delta = \frac{|\Delta I|}{I}$) των δύο τιμών και καταγράφουμε τα συμπεράσματά μας.


u²
m²/s²
0
L m

Ενδεικτικές μετρήσεις

$g=9{,}8 m/s^2$, $m= 214{,}5 \times 10^{-3}$ Kg, $R= 1{,}5 \times 10^{-2}$ m, Γωνία κλίσης $\theta = 7^0$, ημθ = 0,12

ΘΕΣΗ L (m)	ΧΡΟΝΟΣ Δt	Μ.Ο. Δt	Δx =2r (m)	u_{cm} =Δx/Δt	u^2_{cm}	ΘΕΣΗ L (m)
0	-	-	-	-		0
0.1	0.0258	0.0257	0.01	0.0389	0.1513	0.1
	0.0257					
	0.0256					
0.2	0.0182	0.0181		0.549	0.30	0.2
	0.0181					
	0.0182					
0.3	0.0149	0.0149		0.671	0.450	0.3
	0.0149					
	0.0149					
0.4	0.0129	0.01296		0.771	0.594	0.4
	0.0130					
	0.0130					
0.5	0.0116	0.0116		0.862	0.743	0.5
	0.0116					
	0.0116					
0.6	0.0106	0.0105		0.952	0.907	0.6
	0.0106					
	0.0105					



Υπολογισμός κλίσης ευθείας $u^2 = f(L)$: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.49$

Υπολογισμός Ροπής Αδράνειας: $\mathbf{I = 2{,}7 \cdot 10^{-5}\ Kgm^2}$

Θεωρητική: $\mathbf{I = I_1 + I_2 = 2{,}3 \cdot 10^{-5}\ Kgm^2}$